

1 Groupe symétrique

Exercice 1 ★ Comprendre les éléments du groupe symétrique –

1. Soit $n \geq 4$ et $a, b, c, d \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts. Que vaut $(a\ b) \circ (c\ d) \circ (d\ a)$?
2. Que dire d'une permutation de S_n possédant au moins $n - 1$ points fixes.
3. Une permutation $s \neq Id$ telle que $s^2 = Id$ est-elle nécessairement une transposition ?
4. Énumérer tous les éléments de \mathcal{S}_4 .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1020]

Exercice 2 ★ Étude de permutations –

Pour les permutations σ suivantes, décomposer σ en produits de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer l'ordre de σ , la signature de σ , calculer σ^{100} :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1021]

Exercice 3 ★ Décomposition en produit de transpositions –

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ .
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2001} .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1022]

Exercice 4 ★★★★★ Le groupe alterné –

Pour $n \geq 1$, on note \mathcal{A}_n l'ensemble des éléments de \mathcal{S}_n de signature égale à 1. \mathcal{A}_n est appelé le groupe alterné d'indice n .

1. Démontrer que \mathcal{A}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n .
2. Énumérer tous les éléments de \mathcal{A}_3 , de \mathcal{A}_4 .
3. On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de \mathcal{S}_n . Démontrer que $\phi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n, \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection. En déduire le cardinal de \mathcal{A}_n .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1023]

Exercice 5 ★★ Dénombrement et groupe symétrique –

Soit $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$. Combien le groupe \mathcal{S}_n possède-t-il de cycles de longueur k ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1024]

Exercice 6 ★★★★★ Signature d'une grande permutation –

Soit $n \geq 1$. Déterminer la signature de la permutation suivante :

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1027]

Exercice 7 ★★★★★ Le centre du groupe symétrique –

Soit $n \geq 3$.

1. Soient $a \neq b \in \{1, \dots, n\}$ et soit $\sigma \in S_n$. Quelle est la permutation $\sigma \circ (ab) \circ \sigma^{-1}$?
2. On appelle centre du groupe symétrique l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ qui commutent avec toutes les autres : $\forall s \in S_n, s \circ \sigma = \sigma \circ s$. Déterminer le centre de S_n .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1025]

Exercice 8 ★★★★★ Des générateurs du groupe symétrique –

Soit $n \geq 2$.

1. Démontrer que S_n est engendré par les transpositions $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$.
2. Démontrer que S_n est engendré par les transpositions $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$.
3. On considère la transposition $t = (1\ 2)$ et le cycle $c = (1\ 2\ 3 \dots n)$. Calculer $c^k t c^{-k}$. En déduire que S_n est engendré par t et c .
4. On considère la transposition $t = (1\ 2)$ et le cycle $c = (1\ 2\ 3 \dots n)$. Calculer $c^k t c^{-k}$.
5. En déduire que S_n est engendré par t et c .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1026]

Exercice 9 ★★★★★ Le jeu de taquin –

Un jeu de taquin est constitué de neuf cases dont huit sont occupées par un jeton numéroté de 1 à 8, et une est vide. On peut faire glisser un jeton horizontalement ou verticalement dans la case vide. On repère le résultat d'une manipulation par la permutation des numéros qu'elle produit (on lit les numéros dans l'ordre, sans s'occuper de la case vide). Par exemple, dans la manipulation suivante,

	1	2	3		4	1	3
Position initiale :	4	5	6	Position finale :	2		5
	7	8			7	8	6

la permutation obtenue est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Démontrer qu'on ne peut obtenir que des permutations de signature égale à 1.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1028]

2 Petits calculs

Exercice 10 ★ Déterminant 4x4 –

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

où a, b, c, d sont des éléments de \mathbb{R} .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3123]

Exercice 11 ★ Divisible sans calculs! –

Montrer, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par 13 :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

Exercice 12 ★ Calcul sans développer –

Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

Indication ▼ Correction ▼

[977]

Exercice 13 ★★ Déterminant et opérations –

On considère les matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $B = TA$ et calculer le déterminant de B .
2. Dédire de la question précédente le déterminant de A .
3. Dédire de la question précédente le déterminant de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}.$$

Indication ▼ Correction ▼

[3094]

Exercice 14 ★★ Sous forme factorisée –

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Indication ▼ Correction ▼

[978]

Exercice 15 ★★★ Connaissant une formule sur A –

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $3A - 6I_3$ sachant que $A^2 = 4A - 3I_3$ et que ce déterminant est positif.

Indication ▼ Correction ▼

[2767]

3 Grands calculs

Exercice 16 ★★ Tridiagonal –

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.

2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[973]

Exercice 17 ★★ **Calcul à l'aide d'une fonction affine** –

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[981]

Exercice 18 ★★ **Déterminant et matrice antisymétrique** –

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et soit $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2931]

Exercice 19 ★★ **Imbriqué...** –

Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[996]

Exercice 20 ★★ **En jouant sur les colonnes** –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note A_j la j -ième colonne de A . Soit B la matrice dont les colonnes B_j sont

$$B_j = S - A_j = \sum_{k \neq j} A_k \text{ où } S = \sum_{k=1}^n A_k.$$

Démontrer que

$$\det(B) = (-1)^{n-1} (n-1) \det(A).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2667]

Exercice 21 ★★ **Pleins de -1 !** –

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[975]

Exercice 22 ★★★ **Déterminant tridiagonal** –

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[998]

Exercice 23 ★★★★★ Avec des coefficients binomiaux –

Soient $n \geq 1, p \geq 0$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1003]

Exercice 24 ★★★★★ Avec des puissances –

Calculer le déterminant de la matrice $(i^j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1001]

Exercice 25 ★★★★★ Matrice compagnon –

Soient a_0, \dots, a_{n-1} n nombres complexes et soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A - xI_n)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1002]

Exercice 26 ★★★★★ Déterminant circulant –

Soient a_1, \dots, a_n des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[999]

4 Déterminants d'un endomorphisme

Exercice 27 ★★ Sur des polynômes –

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1004]

Exercice 28 ★★ Produit de deux matrices –

Soient n et p des entiers avec $p < n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}()$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}()$. Calculer le déterminant de AB .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1005]

Exercice 29 ★★★★★ Déterminant de la transposition –

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n()$ défini par $\phi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1006]

5 Formule de Cramer et comatrice

Exercice 30 ★★★★★ Inversibilité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ –

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que M^{-1} soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1007]

Exercice 31 ★★★★★ Rang de la comatrice et applications –

Soit $A \in \mathcal{M}_n()$.

1. Discuter le rang de $\text{comat}A$ en fonction du rang de A .
2. Résoudre, pour $n \geq 3$, l'équation $\text{comat}A = A$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1008]

6 Applications

Exercice 32 ★★★★★ Calcul de déterminant et matrices inversibles. –

Calculer le déterminant des matrices suivantes et déterminer pour quelles valeurs du (des) paramètres ces matrices sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3093]

Exercice 33 ★★ Inversibilité d'une matrice à paramètres –

Étudier, suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ ou $m \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2 - m \\ 1 & m - 1 & 2m - 1 & m^2 - m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1010]

Exercice 34 ★ Famille libre –

Soit dans \mathbb{R}^3 la famille de vecteurs (e_1, e_2, e_3) , avec $e_1 = (1, 1, t)$, $e_2 = (1, t, 1)$ et $e_3 = (t, 1, 1)$. Dire pour quelles valeurs de t la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1011]

Exercice 35 ★★ Polynômes interpolateurs –

Soit $n \geq 2$ un entier et a_1, \dots, a_n des nombres réels distincts. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice de ϕ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et de \mathbb{R}^n .
2. En déduire que pour tout n -uplet (y_1, \dots, y_n) de \mathbb{R}^n , il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2972]

Exercice 36 ★★★★★ A quelle condition la famille est-elle libre ? –

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de scalaires. On note $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour que $(u_i + s)_{1 \leq i \leq n}$ soit libre.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1012]

Exercice 37 ★★★★★ Polynômes –

Soient (z_0, \dots, z_n) des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$((X - z_0)^n, (X - z_1)^n, \dots, (X - z_n)^n)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1013]

Exercice 38 ★★★★★ Similarité –

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur \mathbb{C} , ie qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblables sur \mathbb{R} .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1014]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Chercher les images de chaque élément.
 - 2.
 3. Étudier des produits de transposition.
 4. Partir des décompositions possibles en produits de cycles à support disjoint.
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Chercher l'orbite de 1.
 2. Utiliser la question précédente.
 3. Décomposer chaque cycle.
 4. Chercher l'ordre de σ .
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Vérifier les axiomes des sous-groupes. On utilisera que $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.
 2. Écrire toutes les permutations de \mathcal{S}_3 et de \mathcal{S}_4 et calculer leur signature.
 3. Que vaut $\phi \circ \phi$?
-

Indication pour l'exercice 5 ▲

Qu'est-ce qui caractérise un k -cycle ?

Indication pour l'exercice 6 ▲

Trouver une relation de récurrence.

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. Étudier l'image de $\sigma(a)$, de $\sigma(b)$, puis des autres éléments.
 2. Commencer par étudier ce qui signifie que $\sigma \circ (1\ 2) = (1\ 2) \circ \sigma$ et $\sigma \circ (1\ 3) = (1\ 3) \circ \sigma$.
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Démontrer que toute transposition $(i\ j)$ s'écrit comme produit de ces transpositions.
 2. Démontrer, par récurrence, que toute transposition $(1\ k)$ s'écrit comme produit de ces transpositions.
 3. Procéder par récurrence sur k . Utiliser la question précédente.
 4. Procéder par récurrence sur k .
 5. Utiliser la question précédente.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

A quelle permutation correspond une manipulation horizontale ? une manipulation verticale ?

Indication pour l'exercice 10 ▲

Développer par rapport à une ligne ou une colonne bien choisie, en mettant auparavant un maximum de zéros dans cette ligne ou cette colonne par des opérations élémentaires.

Indication pour l'exercice 11 ▲

546,273, 169 sont divisibles par 13.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Sommer tout sur la première ligne !

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Quel est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ?
 2. Quelle est la formule donnant le déterminant d'un produit ?
 3. Que devient le déterminant quand on multiplie une colonne par un nombre réel ?
-

Indication pour l'exercice 14 ▲

Faire apparaître des 0 sur la première colonne, puis factoriser

$$\cos 2b - \cos 2a = 2 \cos^2 b - 2 \cos^2 a.$$

Indication pour l'exercice 15 ▲

Que vaut $(A - 2I_3)^2$?

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Développer suivant la première colonne.
 2. Utiliser votre cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, ou conjecturer la valeur de Δ_n et démontrer la par récurrence.
-

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Retrancher la première colonne à toutes les autres colonnes.
 2. Calculer le déterminant $D(x)$ obtenu en ajoutant x à chacun des coefficients de la matrice. On pourra remarquer qu'on obtient facilement $D(-a)$ et $D(-b)$.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

Posons $f(x) = \det(A + xJ)$. On peut alors démontrer que

1. f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1
 2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$.
-

Indication pour l'exercice 19 ▲

Procéder par récurrence, et retrancher la première colonne aux autres.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Faire plein d'opérations sur les colonnes (commencer par toutes les ajouter dans la première).

Indication pour l'exercice 21 ▲

Commencer passer de A à B en multipliant certaines lignes et certaines colonnes par des -1 ?

Indication pour l'exercice 22 ▲

Développer par rapport à la première ligne pour trouver une formule de récurrence. Calculer les premiers termes.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Retirer l'avant-dernière ligne à la dernière, puis la ligne $p + 1 - 2$ à la ligne $p + 1 - 1$ etc... On pourra appliquer la formule du triangle de Pascal.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Faire apparaître un déterminant de Vandermonde !

Indication pour l'exercice 25 ▲

Développer par rapport à la dernière colonne.

Indication pour l'exercice 26 ▲

Indication pour l'exercice 27 ▲

Chercher la matrice de u dans une base bien choisie de $\mathbb{R}_n[X]$ (la plus facile, le plus souvent !).

Indication pour l'exercice 28 ▲

Majorer le rang de AB .

Indication pour l'exercice 29 ▲

Utiliser la décomposition de $\mathcal{M}_n()$ en somme directe des matrices symétriques et antisymétriques.

Indication pour l'exercice 30 ▲

Montrer que c'est équivalent à dire que $\det(M) = \pm 1$.

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. Penser à l'égalité ${}^t\text{comat}(A)A = \det(A)I_n$. Seul le cas où le rang de A vaut $n - 1$ pose problème. Réfléchir alors en termes d'applications linéaires.
 2. Appliquer la question précédente. Si A est inversible, prouver que nécessairement $\det(A) = 1$.
-

Indication pour l'exercice 32 ▲

Calculer les déterminants en faisant des opérations pour que le déterminant apparaisse directement sous forme factorisée.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Il suffit de calculer le déterminant. Il faut le calculer de façon suffisamment intelligente pour qu'il apparaisse immédiatement sous forme factorisée. Par exemple, pour la première matrice, commencer par tout ajouter sur la première colonne.

Indication pour l'exercice 34 ▲

Il suffit de calculer le déterminant de la matrice de ces trois vecteurs.

Indication pour l'exercice 35 ▲

- 1.
 2. On veut montrer que ϕ est bijective, ou encore que sa matrice est inversible. Quel est son déterminant ?
-

Indication pour l'exercice 36 ▲

Traduire le fait que ce soit une famille libre par un système dont l'unique solution doit être le vecteur nul. Calculer le déterminant de ce système.

Indication pour l'exercice 37 ▲

Calculer le déterminant de cette famille dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. On se ramènera à un déterminant de Vandermonde.

Indication pour l'exercice 38 ▲

Considérer P_1, P_2 les parties réelles et imaginaires de P et montrer qu'il existe un réel x tel que $P_1 + xP_2$ est inversible.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On cherche l'image de chaque élément. Les éléments différents de a, b, c, d ne sont pas modifiés. Pour a, b, c et d , on a :

$$\begin{array}{cccc} a & \mapsto_{(d\ a)} & d & \mapsto_{(c\ d)} & c & \mapsto_{(a\ b)} & c \\ b & \mapsto_{(d\ a)} & b & \mapsto_{(c\ d)} & b & \mapsto_{(a\ b)} & a \\ c & \mapsto_{(d\ a)} & c & \mapsto_{(c\ d)} & d & \mapsto_{(a\ b)} & d \\ d & \mapsto_{(d\ a)} & a & \mapsto_{(c\ d)} & a & \mapsto_{(a\ b)} & b. \end{array}$$

La permutation est donc un cycle de longueur 4, $(a\ c\ d\ b)$.

2. Une permutation étant une bijection, le dernier élément de $\{1, \dots, n\}$ ne peut être envoyé que sur lui-même. Une telle permutation est donc nécessairement l'identité.

3. Non, du moins si $n \geq 4$. En effet, la composée de deux transpositions à support disjoint vérifie elle-même que $s^2 = Id$.

4. Pour énumérer tous les éléments de \mathcal{S}_4 , on peut partir du fait qu'une permutation se décompose de manière unique en produit de cycles à supports disjoints. On trouve alors que les permutations sont

l'identité (correspond à des produits de cycle de longueur 1); les 4 cycles, ce sont :

$$(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2);$$

les 3 cycles (qui correspondent à un produit d'un cycle de longueur 3 par un cycle de longueur 1); ces 3 cycles sont

$$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3).$$

les transpositions (qui correspondent à un produit d'un cycle de longueur 2 et de deux cycles de longueur 1), ces transpositions sont :

$$(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$$

les produits de deux transpositions à support disjoint (produit de deux cycles de longueur 2). Ces produits sont :

$$(1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3).$$

On a ainsi énuméré les 24 éléments de \mathcal{S}_4 .

5. l'identité (correspond à des produits de cycle de longueur 1);

6. les 4 cycles, ce sont :

$$(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2);$$

7. les 3 cycles (qui correspondent à un produit d'un cycle de longueur 3 par un cycle de longueur 1); ces 3 cycles sont

$$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3).$$

8. les transpositions (qui correspondent à un produit d'un cycle de longueur 2 et de deux cycles de longueur 1), ces transpositions sont :

$$(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$$

9. les produits de deux transpositions à support disjoint (produit de deux cycles de longueur 2). Ces produits sont :

$$(1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On commence par étudier les images successives de 1. Ce sont 3, 4, 6. On étudie ensuite les images successives de 2. On trouve 5 (ensuite on revient à 2). On a épuisé tous les éléments de $1, \dots, 6$. La décomposition canonique de σ_1 en produits de cycles disjoints est

$$\sigma_1 = (1, 3, 4, 6) \circ (2, 5).$$

Pour décomposer σ_1 en produit de transpositions, il suffit de décomposer chacun des cycles en produits de transposition. Pour le second, c'est facile car il s'agit déjà d'une transposition. Pour le premier, on écrit

$$(1, 3, 4, 6) = (1, 3) \circ (3, 4) \circ (4, 6)$$

et donc

$$\sigma_1 = (1, 3) \circ (3, 4) \circ (4, 6) \circ (2, 5).$$

L'ordre du cycle $(1, 3, 4, 6)$ est 4, l'ordre du cycle $(2, 5)$ est 2, l'ordre de la permutation est donc le ppcm de 2 et 4, à savoir 4. En particulier, puisque $4 \mid 100$, on en déduit que $\sigma_1^{100} = Id$. Enfin, puisqu'on a décomposé σ_1 en produit de transpositions, il est facile de déterminer sa signature. Elle vaut

$$\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^4 = 1.$$

2. Par la même méthode, on trouve

$$\sigma_2 = (1, 4, 7, 8) \circ (2, 6, 5) \circ (3, 9),$$

$$\sigma_2 = (1, 4) \circ (4, 7) \circ (7, 8) \circ (2, 6) \circ (6, 5) \circ (3, 9).$$

L'ordre de σ_2 est le ppcm de 4, 3 et 2, soit 12. La signature de σ_2 est $(-1)^6 = 1$. Enfin, puisque $100 \equiv 0[2]$, $100 \equiv 1[3]$ et $100 \equiv 0[4]$, on en déduit que

$$\sigma_2^{100} = (2, 6, 5)^1 = (2, 6, 5).$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On cherche l'orbite de 1. On trouve 3, 6, 2, 5. 4 n'est pas dans l'orbite de 1, on cherche son orbite. On trouve 7. Tous les éléments de $\{1, \dots, 7\}$ étant couverts, la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints est

$$\sigma = (1 \ 3 \ 6 \ 2 \ 5) \circ (4 \ 7).$$

2. La signature du 5-cycle $(1 \ 3 \ 6 \ 2 \ 5)$ est $(-1)^{5-1} = 1$. La signature de la transposition $(4 \ 7)$ est -1. La signature de σ est donc $1 \times (-1) = -1$.

3. On va décomposer chaque cycle intervenant dans la décomposition de σ en produit de transpositions. Pour $(4 \ 7)$, c'est déjà fait ! Pour le 5-cycle, on a tout simplement

$$(1 \ 3 \ 6 \ 2 \ 5) = (1 \ 3) \circ (3 \ 6) \circ (6 \ 2) \circ (2 \ 5),$$

d'où

$$\sigma = (1 \ 3) \circ (3 \ 6) \circ (6 \ 2) \circ (2 \ 5) \circ (4 \ 7).$$

On peut alors retrouver que la signature de σ est égale à -1.

4. On remarque que $\sigma^{10} = Id$ (l'ordre de σ valant le ppcm de 2 et 5, soit 10). Ainsi, $\sigma^{2000} = (\sigma^{10})^{200} = Id$. Finalement, $\sigma^{2001} = \sigma$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. D'abord, il est clair que $Id_{\{1, \dots, n\}}$ est un élément de \mathcal{A}_n . Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{A}_n$. Alors on a

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') = 1 \times 1 = 1,$$

et donc $\sigma\sigma' \in \mathcal{A}_n$. D'autre part, on a

$$\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(Id) = 1$$

et

$$\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma^{-1})$$

et donc $\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$ ce qui prouve que σ^{-1} est bien un élément de \mathcal{A}_n . On a donc bien vérifié que \mathcal{A}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n . Si on est un peu plus savant, on pouvait aussi remarquer que \mathcal{A}_n est le noyau de la signature, qui est un morphisme de groupe. A ce titre, \mathcal{A}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n .

2. Les éléments de \mathcal{S}_3 sont :

l'identité, qui est élément de \mathcal{A}_3 ; les transpositions, qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_3 ; les 3-cycles, $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$, qui sont éléments de \mathcal{A}_3 .

En particulier, \mathcal{A}_3 est constitué des 3 éléments décrits précédemment. Décrivons maintenant \mathcal{A}_4 : les éléments de \mathcal{S}_4 sont :

l'identité, qui est élément de \mathcal{A}_4 ; les 4 cycles, qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_4 ; les 3 cycles, qui sont éléments de \mathcal{A}_4 ; ces 3 cycles sont

$$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3).$$

les transpositions (ou 2-cycles), qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_4 ; les produits de deux transpositions à support disjoint, qui sont éléments de \mathcal{A}_4 . Ces produits sont :

$$(1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3).$$

Ainsi, \mathcal{A}_4 est constitué des 12 éléments décrits ci-dessus.

3. l'identité, qui est élément de \mathcal{A}_3 ;

4. les transpositions, qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_3 ;

5. les 3-cycles, $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$, qui sont éléments de \mathcal{A}_3 .

6. l'identité, qui est élément de \mathcal{A}_4 ;

7. les 4 cycles, qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_4 ;

8. les 3 cycles, qui sont éléments de \mathcal{A}_4 ; ces 3 cycles sont

$$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3).$$

9. les transpositions (ou 2-cycles), qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_4 ;

10. les produits de deux transpositions à support disjoint, qui sont éléments de \mathcal{A}_4 . Ces produits sont :

$$(1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3).$$

11. Puisque $\tau^2 = Id_{\{1, \dots, n\}}$, il est clair que $\phi \circ \phi = Id_{S_n}$. Ainsi, ϕ est bijective, d'inverse $\phi^{-1} = \phi$. Puisque $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$, ϕ envoie \mathcal{A}_n sur $S_n \setminus \mathcal{A}_n$. Puisque ϕ est bijective, les cardinaux de \mathcal{A}_n et de $S_n \setminus \mathcal{A}_n$ sont identiques. D'autres part, S_n est la réunion disjoint de \mathcal{A}_n et de $S_n \setminus \mathcal{A}_n$, donc

$$\text{card}(S_n) = \text{card}(\mathcal{A}_n) + \text{card}(S_n \setminus \mathcal{A}_n) = 2 \text{card}(\mathcal{A}_n).$$

Il vient $\text{card}(\mathcal{A}_n) = \frac{n!}{2}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Un k -cycle s'écrit $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$. On doit donc choisir dans $\{1, \dots, n\}$ k éléments ordonnés parmi n . Mais l'écriture $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ n'est pas unique. Il y a en effet k façons d'écrire le même k -cycle, suivant le choix que l'on fait pour le premier terme - par exemple, $(a_2\ a_3\ \dots\ a_k\ a_1)$ représente le même k -cycle que $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$. On conclut finalement que le nombre de cycles de longueur k est égal à

$$\frac{A_n^k}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Notons ε_n la signature de σ_n . Pour $n \geq 3$, on peut décomposer σ_n en $\tau_n \circ s_n$ où τ_n est la transposition $(1\ n)$ et s_n est la permutation

$$s_n = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mais il est clair que la signature de s_n vaut celle de σ_{n-2} (il s'agit de la même permutation, mais en renumérotant les éléments). On obtient donc la formule de récurrence

$$\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-2}.$$

En particulier, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-4}$ pour $n \geq 4$, et il suffit donc de regarder la congruence modulo 4 de n pour trouver la valeur de ε_n . On en déduit que

$$\begin{cases} \varepsilon_{4k+1} = \varepsilon_1 = 1 \\ \varepsilon_{4k+2} = \varepsilon_2 = -1 \\ \varepsilon_{4k+3} = \varepsilon_3 = -1 \\ \varepsilon_{4k+4} = \varepsilon_4 = 1 \end{cases}$$

Une autre façon de procéder est de remarquer que σ_n est le produit des transpositions suivantes : $(1 \ n), (2 \ n-1), \dots$. Il suffit alors de compter le nombre de transpositions pour déterminer la signature.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Commençons par étudier l'image de $\sigma(a)$. On a

$$\sigma^{-1}(\sigma(a)) = a, \text{ puis } (a \ b)(a) = b,$$

donc $\sigma(a)$ est envoyé sur $\sigma(b)$. Un raisonnement similaire montre que $\sigma(b)$ est envoyé sur $\sigma(a)$. Prenons maintenant $k \neq \sigma(a), \sigma(b)$. Alors $\sigma^{-1}(k) \neq a, b$. En particulier, $\sigma^{-1}(k)$ reste invariant par la transposition $(a \ b)$. Et donc :

$$\sigma \circ (a \ b) \circ \sigma^{-1}(k) = \sigma(\sigma^{-1}(k)) = k.$$

Ainsi, les éléments différents de $\sigma(a), \sigma(b)$ sont invariants par la permutation. On en déduit que

$$\sigma \circ (a \ b) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a) \ \sigma(b)).$$

2. Soit σ appartenant au centre de S_n . Alors $\sigma \circ (1 \ 2) = (1 \ 2) \circ \sigma$ soit $\sigma \circ (1 \ 2) \circ \sigma^{-1} = (1 \ 2)$, ce qui donne, d'après la question précédente, $(\sigma(1) \ \sigma(2)) = (1 \ 2)$. Ainsi, on a nécessairement $\sigma(1) = 1$ ou $\sigma(1) = 2$. De même, on a $\sigma \circ (1 \ 3) = (1 \ 3) \circ \sigma$, et le même raisonnement prouve que $\sigma(1) = 1$ ou $\sigma(1) = 3$. En comparant ces deux résultats, on a $\sigma(1) = 1$. Bien entendu, ce qui a été réalisé pour 1 peut l'être pour n'importe quel entier dans $\{1, \dots, n\}$, et σ doit être égale à l'identité. Réciproquement, l'identité commute avec toutes les permutations. Le centre du groupe symétrique, pour $n \geq 3$, est donc constitué de l'identité. Remarquons que cette démonstration ne fonctionne plus si $n = 2$. Dans ce cas, le centre de S_2 est S_2 tout entier (mais il n'y a que deux éléments dans S_2 !).

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Puisque les transpositions engendrent S_n , il suffit de démontrer que toute transposition $(i \ j)$, avec $i < j$, s'écrit comme produit des transpositions $(1 \ k)$. Mais si $i = 1$, c'est déjà fait, et si $1 < i$, on a $(i \ j) = (1 \ i) \circ (1 \ j) \circ (1 \ i)$.

2. On va utiliser la question précédente et démontrer que toute transposition $(1 \ k)$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(i \ i+1)$. On procède par récurrence finie sur $k \in \{2, \dots, n\}$, la propriété étant vraie si $k = 2$. Supposons la propriété vraie au rang k . Pour la prouver au rang $k+1$, il suffit d'écrire que

$$(1 \ k+1) = (k \ k+1) \circ (1 \ k) \circ (k \ k+1).$$

3. On va prouver par récurrence finie sur $k \in \{0, \dots, n-2\}$ que $c^k \circ t \circ c^{-k} = (k+1 \ k+2)$. La propriété est vraie si $k = 0$. Supposons la prouvée au rang k . Alors

$$c^{k+1} \circ t \circ c^{-(k+1)} = c \circ (k+1 \ k+2) \circ c^{-1} = (k+2 \ k+3).$$

D'après la question précédente, toute transposition de la forme $(k \ k+1)$ s'écrit en fonction de c et de t . De plus, ces transpositions engendrent S_n . Ainsi, c et t engendrent S_n .

4. On va prouver par récurrence finie sur $k \in \{0, \dots, n-2\}$ que $c^k \circ t \circ c^{-k} = (k+1 \quad k+2)$. La propriété est vraie si $k=0$. Supposons la prouvée au rang k . Alors

$$c^{k+1} \circ t \circ c^{-(k+1)} = c \circ (k+1 \quad k+2) \circ c^{-1} = (k+2 \quad k+3).$$

5. D'après la question précédente, toute transposition de la forme $(k \quad k+1)$ s'écrit en fonction de c et de t . De plus, ces transpositions engendrent S_n . Ainsi, c et t engendrent S_n .

Correction de l'exercice 9 ▲

Lorsqu'on réalise un déplacement horizontal d'un jeton, on ne change par l'ordre des numéros, et la permutation correspondante est simplement l'identité. Lorsqu'on réalise un déplacement vertical d'un jeton, que ce soit vers le haut ou vers le bas, on produit un cycle de longueur 3, donc une permutation de signature égale à 1. La position finale étant obtenue comme suite de déplacements horizontaux ou verticaux, la permutation obtenue correspond à un produit de cycles de longueur 3, donc à un produit de permutations de signature égale à 1. C'est donc aussi une permutation de signature égale à 1. Ces jeux de taquin sont souvent utilisés pour réaliser des puzzles. Cet exercice prouve que toutes les positions possibles des jetons ne sont pas atteignables.

Correction de l'exercice 10 ▲

On a

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ &= (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b-a & c-a & d-a \\ a & 0 & b-a & c-a \\ a & 0 & 0 & b-a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array} \end{aligned}$$

On développe par rapport à la dernière ligne, où le seul terme non nul est le premier. En suivant la règle d'alternance de signes, on doit multiplier par $-a$ le déterminant restant :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (-a) \times \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} \\ &= (-a)(b-a)^3. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

On ne change pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres. Ici, on ajoute à la troisième ligne 10 fois la seconde et 100 fois la première. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 546 & 273 & 169 \end{vmatrix}.$$

Maintenant, tous les éléments de la dernière ligne sont divisibles par 13, et le déterminant vaut :

$$13 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 42 & 21 & 13 \end{vmatrix}.$$

C'est bien un entier divisible par 13.

Correction de l'exercice 12 ▲

On commence par faire l'opération $L_1 + L_2 + L_3 \rightarrow L_1$. On obtient

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \\ &= (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On retire ensuite b fois la première ligne à la seconde, et c fois la première ligne à la troisième. On obtient alors

$$D = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il reste une matrice triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Celle-ci est de déterminant 1 et donc $D = 1 + a + b + c$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. On trouve

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire étant égal au produit des éléments sur sa diagonale, on trouve $\det(B) = 48$.

2. Pour la même raison, on a $\det(T) = 1$. De la formule

$$\det(B) = \det(T) \times \det(A)$$

on tire $\det(A) = 48$.

3. C est obtenu à partir de A en multipliant la première colonne par 3, la deuxième par $-1/2$, et la troisième par 5. On a donc

$$\det(C) = 3 \times \frac{-1}{2} \times 5 \det(A) = -360.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

On commence par faire apparaître des 0 sur la première colonne, puis on transforme la troisième colonne en utilisant la formule

$$\cos 2b - \cos 2a = 2\cos^2 b - 2\cos^2 a.$$

On trouve successivement :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & \cos 2b - \cos 2a \\ 0 & \cos c - \cos a & \cos 2c - \cos 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2\cos^2 b - 2\cos^2 a \\ 0 & \cos c - \cos a & 2\cos^2 c - 2\cos^2 a \end{vmatrix}.$$

On obtient alors, en utilisant que $\cos b - \cos a$ (resp. $\cos c - \cos a$) est un facteur commun de la deuxième (resp. troisième) ligne :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2(\cos b - \cos a)(\cos b + \cos a) \\ 0 & \cos c - \cos a & 2(\cos c - \cos a)(\cos c + \cos a) \end{vmatrix} \\ &= (\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 1 & 2(\cos c + \cos a) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On fait apparaître un dernier zéro en soustrayant la deuxième ligne à la troisième, puis on développe le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned} D &= (\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 0 & 2(\cos c - \cos b) \end{vmatrix} \\ &= 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b). \end{aligned}$$

Remarquer la symétrie (prévisible) entre les variables a, b, c dans cette expression.

Correction de l'exercice 15 ▲

On commence par remarquer que $3A - 6I_3 = 3(A - 2I_3)$ et donc

$$\det(3A - 6I_3) = 3^3 \det(A - 2I_3).$$

D'autre part, on a

$$(A - 2I_3)^2 = A^2 - 4A + 4I_3 = I_3.$$

Ainsi, $(\det(A - 2I_3))^2 = \det((A - 2I_3)^2) = 1$. Puisque $\det(A - 2I_3) = \det(3A - 6I_3)/27 \geq 0$, on en déduit que $\det(A - 2I_3) = 1$ et que

$$\det(3A - 6I_3) = 27.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. On développe suivant la première colonne. On trouve

$$\Delta_{n+2} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est Δ_{n+1} . Pour le second, on développe par rapport à la première ligne, et on retrouve alors Δ_n (on a barré 2 lignes et 2 colonnes). Ceci nous donne la formule voulue.

2. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 = 3r - 2$. Ses racines sont $r = 1$ et $r = 2$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = \lambda 2^n + \mu 1^n.$$

Mais $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 3 \\ 4\lambda + \mu = 7. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Retranchons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors le déterminant de $A(x)$ est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type $a_{i,1} + x$ et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de x). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que

$$\det(A(x)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (a_{i,1} + x) \det(A_i)$$

où A_i est une matrice à coefficients réels. D'où le résultat.

2. Soit $D(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à chacun des coefficients. D'après la question précédente, on sait que $D(x) = \lambda x + \mu$ pour des réels λ et μ . De plus, $D(-a)$ est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont $\alpha_i - a$. D'où

$$D(-a) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - a).$$

De même, on a

$$D(-b) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - b).$$

λ et μ se déduisent alors facilement par la résolution d'un système 2×2 :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{D(-b) - D(-a)}{a - b} \\ \mu = \frac{aD(-b) - bD(-a)}{a - b}. \end{cases}$$

Ce qui nous intéresse est la valeur $D(0)$, soit

$$D(0) = \frac{a \prod_{i=1}^n (\alpha_i - b) - b \prod_{i=1}^n (\alpha_i - a)}{a - b}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Posons $f(x) = \det(A + xJ)$. On commence par démontrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. En effet, dans la matrice $A + xJ$, retranchons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors le déterminant de $A + xJ$ est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type $a_{i,1} + x$ et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de x). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} (a_{i,1} + x) \det(A_i)$$

où A_i est une matrice à coefficients réels et donc $\det(A_i)$ est une constante (ne dépend pas de x). On démontre ensuite que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \det(A + xJ) \\ &= \det((A + xJ)^T) \\ &= \det(-A + xJ) \\ &= \det((-1) \times (A - xJ)) \\ &= (-1)^{2n} \det(A - xJ) \\ &= \det(A - xJ) \\ &= f(-x). \end{aligned}$$

On conclut car les seuls polynômes de degré inférieur ou égal à 1 qui sont pairs sont les polynômes constants.

Correction de l'exercice 19 ▲

Notons $D_n(s_1, \dots, s_n)$ ce déterminant. Prouvons par récurrence sur n que, pour tous réels s_1, \dots, s_n ,

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}).$$

On vérifie cette relation facilement pour les premières valeurs de n . Si la propriété est vraie au rang $n - 1$, prouvons la au rang n en retranchant la première colonne à toutes les autres. On trouve

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & \dots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & \dots & s_n - s_1 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \dots & \dots & s_2 - s_1 \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \dots & s_3 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \dots & s_n - s_1 \end{vmatrix}.$$

On en déduit que

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1 D_{n-1}(s_2 - s_1, s_3 - s_1, \dots, s_n - s_1).$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} D(s_1, \dots, s_n) &= s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_1 - s_2 + s_1) \dots (s_n - s_1 - s_{n-1} + s_1) \\ &= s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}). \end{aligned}$$

On peut aussi démontrer ce résultat sans récurrence en effectuant la suite d'opérations suivantes (dans cet ordre) :

$$L_n - L_{n-1} \rightarrow L_n \quad L_{n-1} - L_{n-2} \rightarrow L_{n-1} \quad \vdots \quad L_2 - L_1 \rightarrow L_2.$$

On obtient alors une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont $s_1, s_2 - s_1, \dots, s_n - s_{n-1}$ ce qui donne immédiatement le résultat.

Correction de l'exercice 20 ▲

On commence par ajouter toutes les autres colonnes à la première colonne de B , ce qui ne change pas le déterminant. On a

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(B_1 + \dots + B_n, B_2, \dots, B_n) \\ &= \det((n-1)S, B_2, \dots, B_n) \\ &= (n-1) \det(S, B_2, \dots, B_n). \end{aligned}$$

On retire ensuite la première colonne à toutes les autres colonnes :

$$\begin{aligned} \det(B) &= (n-1) \det(S, B_2 - S, \dots, B_n - S) \\ &= (n-1) \det(S, -A_2, \dots, -A_n) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1) \det(S, A_2, \dots, A_n). \end{aligned}$$

On conclut en soustrayant toutes les autres colonnes à la première colonne pour trouver :

$$\begin{aligned}\det(B) &= (-1)^{n-1}(n-1) \det(S - (A_2 + \dots + A_n), A_2, \dots, A_n) \\ &= (-1)^{n-1}(n-1) \det(A_1, \dots, A_n) \\ &= (-1)^{n-1}(n-1) \det(A).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 21 ▲

On passe de A à B en multipliant toutes les lignes impaires par -1 , puis toutes les colonnes impaires par -1 . Si on note p le nombre de lignes impaires et q le nombre de colonnes impaires, alors on sait que

$$\det(B) = (-1)^{p+q} \det(A).$$

Mais la matrice comporte autant de lignes impaires que de colonnes impaires, et donc $p = q$, ce qui entraîne que $\det(B) = \det(A)$.

Correction de l'exercice 22 ▲

On note $\Delta_n(x)$ le déterminant recherché. On remarque, en écrivant la formule qui donne la définition du déterminant, que $\Delta_n(x)$ est un polynôme de degré exactement égal à $2n$. De plus, le terme en x^{2n} ne peut s'obtenir qu'en faisant le produit des termes diagonaux. On en déduit que le coefficient devant x^{2n} est égal à 1. Calculons ensuite $\Delta_n(x)$ en effectuant un développement suivant la première ligne. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) + x \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \dots & & \\ 0 & 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

On continue en effectuant un développement suivant la première colonne du déterminant restant. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x).$$

Pour trouver vraiment la valeur de $\Delta_n(x)$, on calcule les premières itérations. On a

$$\Delta_1(x) = 1+x^2, \Delta_2(x) = 1+x^2+x^4, \dots$$

On conjecture que $\Delta_n(x) = 1+x^2+\dots+x^{2n}$. Démontrons ceci par récurrence double. La propriété est vraie aux rangs $n=1$ et $n=2$. Si elle est vraie simultanément aux rangs $n-2$ et $n-1$, la formule de récurrence précédente montre qu'elle est aussi vraie au rang n . On obtient donc $\Delta_n(x) = 1+x^2+\dots+x^{2n}$.

Correction de l'exercice 23 ▲

Notons Δ_p ce déterminant (de taille $p+1$), et prouvons que $\Delta_p = \Delta_{p-1}$ pour tout $p \geq 1$. En effet, on effectue successivement les opérations suivantes :

$$L_{p+1} - L_p \rightarrow L_{p+1}, L_p - L_{p-1} \rightarrow L_p, \dots, L_2 - L_1 \rightarrow L_2.$$

Clairement, on fait apparaître des zéros dans la première colonne, excepté sur la première ligne. Pour les autres colonnes, le coefficient du déterminant à la i -ème ligne et à la j -ème colonne vaut initialement $\binom{n+i-1}{j-1}$. Après les opérations, il vaut

$$\binom{n+i-1}{j-1} - \binom{n+i-2}{j-1} = \binom{n+i-2}{j-2}$$

où la dernière égalité vient de la formule du triangle de Pascal. Autrement dit, on a prouvé que

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 0 & \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve bien comme annoncé que $\Delta_p = \Delta_{p-1}$. Puisque $\Delta_0 = 1$, le déterminant recherché est égal à 1.

Correction de l'exercice 24 ▲

On met i en facteur dans chaque ligne de la matrice. On voit alors apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \dots, n)$. Le déterminant recherché vaut donc :

$$\begin{aligned} D &= n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \\ &= n! \prod_{1 < j \leq n} \prod_{1 \leq i < j} (j - i) \\ &= n! \prod_{1 < j \leq n} (j - 1)! \\ &= 1! 2! \dots n! \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 25 ▲

On a, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} \det(A - xI_n) &= \begin{vmatrix} -x & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix} \\ &= (-x)^{n-1} (a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} a_k \Delta_k \end{aligned}$$

où Δ_k est le déterminant suivant ($-x$ est répété k fois sur la diagonale) :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & \vdots & \vdots & -x & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant Δ_k se calcule par blocs (on a une matrice triangulaire supérieure par blocs). De plus, chacun des blocs diagonaux est lui-même triangulaire (inférieur pour le premier, supérieur pour le second). On en déduit que

$$\Delta_k = (-x)^k 1^{n-1-k}$$

et donc que

$$\begin{aligned}\det(A - xI_n) &= (-x)^{n-1}(a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} (-1)^k a_k x^k \\ &= (-1)^n \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 26 ▲

Effectuons le calcul demandé. Pour $i \geq 2$, la i -ème ligne de A est

$$(a_{n-i+2} \dots a_n a_1 \dots a_{n-i+1}).$$

Si on multiplie cette ligne par la j -ième colonne de M , on obtient le coefficient

$$a_{n-i+2} w^{j-1} + \dots + a_1 w^{(j-1)(i-1)} + a_2 w^{(j-1)i} + \dots + a_{n-i+1} w^{(j-1)(n-1)}.$$

Si on factorise ce coefficient par $w^{(j-1)(i-1)}$, on trouve qu'il est égal à

$$w^{(j-1)(i-1)} \times (a_1 + a_2 w^{j-1} + \dots + a_n w^{(j-1)(n-1)}).$$

Ceci est encore vrai pour $i = 1$ puisque $w^0 = 1$. En notant

$$P(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1},$$

on a donc obtenu que la j -ème colonne de AM est égale à la j -ème colonne de M multipliée par $P(w^{j-1})$. Ceci entraîne que

$$\det(AM) = P(1)P(w) \dots P(w^{n-1}) \det(M).$$

Comme d'autre part

$$\det(AM) = \det(A) \det(M)$$

et que le déterminant de M est non nul (c'est un déterminant de Vandermonde et les w^j , $0 \leq j \leq n-1$ sont distincts), on a :

$$\det(A) = P(1)P(w) \dots P(w^{n-1}).$$

Correction de l'exercice 27 ▲

1. Cherchons la matrice de u dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. On a $u(1) = 1$ et pour $j \geq 1$, $u(X^j) = X^j + jX^{j-1}$. Autrement dit, la matrice de u dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure et on en déduit aisément que $\det(u) = 1$.

2. On peut appliquer la même méthode ou remarquer plus simplement que u n'est pas injective, car les polynômes constants sont dans $\ker(u)$. Ainsi, u n'étant pas inversible, $\det(u) = 0$.

3. On calcule toujours la matrice de u dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. Puisque $u(1) = 1$ et $u(X^j) = jX^j + 1$, la matrice est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $1, 1, 2, \dots, n$. Ainsi, $\det(u) = n!$.

Correction de l'exercice 28 ▲

On a :

$$\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$$

(car l'image de AB , vue comme application linéaire, est contenue dans l'image de A). Maintenant, le théorème du rang garantit que

$$\text{rg}(A) \leq p < n.$$

Puisque $AB \in \mathcal{M}_n()$, on a $\det(AB) = 0$.

Correction de l'exercice 29 ▲

$\mathcal{M}_n()$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques et des matrices antisymétriques. Soit (A_1, \dots, A_p) et (B_1, \dots, B_q) une base respective de l'espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques. $(A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q)$ forme une base de $\mathcal{M}_n()$, et il suffit de calculer le déterminant dans cette base. Mais $\phi(A_i) = A_i$ tandis que $\phi(B_j) = -B_j$. On a donc $\det(\phi) = (-1)^q$. Il suffit ensuite de se souvenir que $p = \frac{n(n+1)}{2}$, ou $q = \frac{n(n-1)}{2}$.

Correction de l'exercice 30 ▲

Trouvons d'abord une condition nécessaire. Puisque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det(M) \in \mathbb{Z}$. D'autre part, si $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, son déterminant est un entier et donc $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M} \in \mathbb{Z}$. Ceci entraîne que $\det(M) = \pm 1$. Réciproquement, si $\det(M) = \pm 1$, alors M est inversible. De plus, toutes les entrées de sa comatrice, qui sont obtenues comme déterminants de sous-matrices de M , sont des entiers. De la formule de Cramer, on déduit que $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\text{comat}(M)$ est une matrice à coefficients dans \mathbb{Z} .

Correction de l'exercice 31 ▲

1. Si A est inversible, la formule de Cramer ${}^t\text{comat}(A)A = \det(A)I_n$ prouve que $\text{comat}(A)$ est inversible. Si le rang de A est inférieur ou égal à $n-2$, puisque la comatrice est fabriquée à partir de déterminants extraits d'ordre $n-1$, la comatrice est nulle. Si le rang de A vaut $n-1$, notons u (resp. v) l'endomorphisme associé à A (resp. à ${}^t\text{comat}(A)$) dans la base canonique de n . Nécessairement, on a $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$, et donc la dimension du noyau de v est au supérieur à $n-1$. Ce n'est pas n , puisque la comatrice n'est pas la matrice nulle (un des déterminants extraits d'ordre $n-1$ de A est non nul). Le théorème du rang prouve alors que le rang de la comatrice est 1.

2. Si A est inversible, la formule de Cramer ${}^t\text{comat}(A)A = \det(A)I_n$ prouve que $\text{comat}(A)$ est inversible.

3. Si le rang de A est inférieur ou égal à $n-2$, puisque la comatrice est fabriquée à partir de déterminants extraits d'ordre $n-1$, la comatrice est nulle.

4. Si le rang de A vaut $n-1$, notons u (resp. v) l'endomorphisme associé à A (resp. à ${}^t\text{comat}(A)$) dans la base canonique de n . Nécessairement, on a $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$, et donc la dimension du noyau de v est au supérieur à $n-1$. Ce n'est pas n , puisque la comatrice n'est pas la matrice nulle (un des déterminants extraits d'ordre $n-1$ de A est non nul). Le théorème du rang prouve alors que le rang de la comatrice est 1.

5. Le cas $A = 0$ donne une solution. Dans le cas où le rang de A est compris entre 1 et $n-2$, l'étude précédente montre que l'équation est impossible (sinon A serait la matrice nulle). Si le rang de A est $n-1$, le rang de la comatrice est $1 < n-1$: l'équation est toujours impossible. Si A est inversible, alors A est telle que ${}^tAA = (\det A)I_n$. Mais on a alors $\det({}^tAA) = (\det A)^2 = (\det A)^n = \det((\det A)I_n)$, équation qui entraîne que $\det A = \pm 1$. Mais, puisque ${}^tAA = (\det A)I_n$, on a en passant à la trace $\text{Tr}({}^tAA) = n(\det A)$ et puisque $\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$, on en déduit que $\det(A) \geq 0$. Ainsi, $\det A = 1$ et donc les solutions inversibles de $\text{comat} A = A$ sont à chercher parmi les matrices orthogonales vérifiant ${}^tAA = I_n$ et $\det(A) = 1$. Réciproquement, si A est une matrice orthogonale vérifiant $\det(A) = 1$, alors ${}^tAA = I_n = (\det A)I_n = {}^t(\text{comat} A)A$ entraîne $\text{comat} A = A$, sachant que A est inversible.

6. Le cas $A = 0$ donne une solution.

7. Dans le cas où le rang de A est compris entre 1 et $n-2$, l'étude précédente montre que l'équation est impossible (sinon A serait la matrice nulle).

8. Si le rang de A est $n-1$, le rang de la comatrice est $1 < n-1$: l'équation est toujours impossible.

9. Si A est inversible, alors A est telle que ${}^tAA = (\det A)I_n$. Mais on a alors $\det({}^tAA) = (\det A)^2 = (\det A)^n = \det((\det A)I_n)$, équation qui entraîne que $\det A = \pm 1$. Mais, puisque ${}^tAA = (\det A)I_n$, on a en passant à la trace $\text{Tr}({}^tAA) = n(\det A)$ et puisque $\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ on en déduit que $\det(A) \geq 0$. Ainsi, $\det A = 1$ et donc les solutions inversibles de $\text{comat} A = A$ sont à chercher parmi les matrices orthogonales vérifiant ${}^tAA = I_n$ et $\det(A) = 1$. Réciproquement, si A est une matrice orthogonale vérifiant $\det(A) = 1$, alors ${}^tAA = I_n = (\det A)I_n = {}^t(\text{comat} A)A$ entraîne $\text{comat} A = A$, sachant que A est inversible.

Correction de l'exercice 32 ▲

1. On retire la première ligne à la deuxième ligne et à la troisième ligne. On trouve

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

puisque une matrice ayant deux lignes proportionnelles possède un déterminant égal à 0. Donc A n'est jamais inversible.

2. On retire la première ligne à la deuxième et à la troisième, puis on développe par rapport à la première colonne. On trouve :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

On remarque ensuite que $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ et que $c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice B est inversible si et seulement si les trois nombres réels a , b et c sont différents.

3. On commence par faire les opérations $L_1 - xL_4 \rightarrow L_1$, $L_2 - L_4 \rightarrow L_2$ et $L_3 - L_4 \rightarrow L_3$. En développant ensuite par rapport à la première colonne, on trouve

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 1-x & 1-x^2 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-x & 1-x & 1-x^2 \\ x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & x-1 & 1-x \end{vmatrix}.$$

Sachant que $1-x^2 = (1-x)(1+x)$, on peut mettre en facteur $1-x$ dans chaque colonne du déterminant restant, et on trouve

$$\begin{aligned} \det(C) &= -(1-x)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1-x)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & 1 & 2+x \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1-x)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2+x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1-x)^3(x+3). \end{aligned}$$

La matrice C est donc inversible si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq -3$.

4. On commence par retirer la première ligne aux autres lignes, on développe par rapport à la première colonne, puis on réitère l'opération. On trouve :

$$\begin{aligned}
 \det(D) &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a-b & b-c & c-d \\ 0 & a-b & a-c & b-d \\ 0 & a-b & a-c & a-d \end{vmatrix} \\
 &= a \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ a-b & a-c & b-d \\ a-b & a-c & a-d \end{vmatrix} \\
 &= a(a-b) \begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 1 & a-c & b-d \\ 1 & a-c & a-d \end{vmatrix} \\
 &= a(a-b) \begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & a-b & a-c \end{vmatrix} \\
 &= a(a-b) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a-b & a-c \end{vmatrix} \\
 &= a(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & b-c \\ 1 & a-c \end{vmatrix} \\
 &= a(a-b)^3.
 \end{aligned}$$

La matrice D est donc inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq b$.

Correction de l'exercice 33 ▲

Il suffit de calculer le déterminant. Il faut le calculer de façon suffisamment intelligente pour qu'il apparaisse immédiatement sous forme factorisée. Pour la première matrice, commencer par tout ajouter sur la première colonne.

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a-2 & -1 & 0 & -1 \\ a-2 & a & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & a & -1 \\ a-2 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
 &= (a-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
 &= (a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-2) \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-2)a \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} \\
 &= a(a-2)((a+1)^2 - 1) = a^2(a-2)(a+2).
 \end{aligned}$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si $a \neq 0, 2, -2$. Pour la matrice B , on procède de la même façon, en commençant par mettre $m^2 - m = m(m-1)$ en facteur sur la dernière colonne.

$$\begin{aligned}
 \det(B) &= m(m-1) \begin{vmatrix} 0 & m & m & 1 \\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= m(m-1) \begin{vmatrix} 0 & m & m & 1 \\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & m & 0 \\ 0 & 1 & m & -1 \end{vmatrix} (L4 - L2 \rightarrow L4) \\
 &= -m(m-1) \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ m & m & 0 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -m^2(m-1) \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -m^2(m-1) \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} (C2 - C1 \rightarrow C2) \\
 &= m^2(m-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -m^2(m-1)^2
 \end{aligned}$$

La matrice est inversible si et seulement si $m \neq 0, 1$.

Correction de l'exercice 34 ▲

Puisqu'on est en dimension 3, la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille libre si et seulement si c'est une base. Soit M la matrice de ses trois vecteurs, ie

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si la matrice M est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(M) \neq 0$. Mais on a

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t+2 & 1 & t \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\
 &= -(t+2)(t-1)^2.
 \end{aligned}$$

La famille est donc une base si et seulement si $t \neq -2$ et $t \neq 1$.

Correction de l'exercice 35 ▲

1. La matrice de ϕ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et de \mathbb{R}^n est tout simplement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Il s'agit de démontrer que ϕ est bijective, ou encore que la matrice M de la question précédente est inversible, ou encore que $\det(M) \neq 0$. Mais on reconnaît un déterminant de Vandermonde et on sait que

$$\det(M) = \prod_{i < j} (a_j - a_i) \neq 0.$$

Ainsi, on a bien prouvé l'existence et l'unicité d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $P(a_i) = y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Correction de l'exercice 36 ▲

Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de scalaires telle qu'on ait la relation $\sum_{j=1}^n \lambda_j (u_j + s) = 0$. Développant, on trouve que cette relation est équivalente à $\sum_{j=1}^n (\lambda_j + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \alpha_j) u_j = 0$. La famille (u_1, \dots, u_n) est libre, ceci est équivalent à

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \lambda_j + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \alpha_j = 0.$$

On reformule ces conditions en tant que système d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\begin{pmatrix} (1 + \alpha_1) & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \dots & \dots & \alpha_n & 1 + \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille $(u_i + s)_{1 \leq i \leq n}$ est libre si et seulement si ce système admet pour seule solution la solution identiquement nulle, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Autrement dit, si et seulement si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} (1 + \alpha_1) & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \dots & \dots & \alpha_n & 1 + \alpha_n \end{pmatrix}$$

est inversible. Pour déterminer si A est inversible, on calcule son déterminant, en commençant par retirer la dernière colonne à toutes les précédentes, puis en ajoutant toutes les lignes à la dernière :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 1 + \alpha_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \end{vmatrix} \\ &= 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

En résumé, on a prouvé que $(u_i + s)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre si et seulement si $1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$.

Correction de l'exercice 37 ▲

Calculons le déterminant de cette famille (de $(n+1)$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$) par rapport à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. On a

$$(X - z_i)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} z_i^{n-j} X^j.$$

Le déterminant recherché est donc

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \binom{n}{0}(-z_0)^n & \binom{n}{0}(-z_1)^n & \dots & \binom{n}{0}(-z_n)^n \\ \binom{n}{1}(-z_0)^{n-1} & \binom{n}{1}(-z_1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{1}(-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} (-z_0)^n & (-z_1)^n & \dots & (-z_n)^n \\ (-z_0)^{n-1} & (-z_1)^{n-1} & \dots & (-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde, qui est non-nul puisque les z_i sont supposés tous distincts. La famille considérée est effectivement une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Correction de l'exercice 38 ▲

Écrivons $A = PBP^{-1}$ sous la forme $AP = PB$. Soit P_1 la partie réelle de P , et P_2 sa partie imaginaire. Alors, prenant la partie réelle puis la partie imaginaire de l'équation précédente, et puisque A et B sont à coefficients réels, on obtient $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$. Ainsi, pour tout réel x , on a $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$. Il suffit donc de prouver qu'il existe un réel x tel que $P_1 + xP_2$ est inversible. Posons $Q(X) = \det(P_1 + XP_2)$. Q est un polynôme qui n'est pas identiquement nul puisque $Q(i) = \det(P) \neq 0$. Ainsi, il existe un réel x tel que $Q(x) \neq 0$. Pour ce réel, la matrice $M = (P_1 + xP_2) \in GL_n(\mathbb{R})$, et $A = MBM^{-1}$.
